ΑΡΧΕΙΟΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΚΔΙΔΟΜΕΝΟΝ
ΥΠΟ
ΔΗΜΗΤΡ. ΕΜΜ. ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗ
ΕΤΟΣ 37ον (1957) ΤΕΥΧΟΣ Γ'
ΤΟΜΟΣ 37ος ΙΟΥΛΙΟΣ - Σ/ΒΡΙΟΣ

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ὑπὸ Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

## I. Εἰσαγωγή (¹)

Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ ἐνδιαφέρουσαν οἰκονομετρικὴν τεχνικὴν ἀναπτυχθεῖσαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη καὶ χρησιμοποιουμένην ἤδη εἰς διαφόρους χώρας διὰ πρακτικὰς οἰκονομικὰς ἀναλύσεις. Ἡ τεχνικὴ αὕτη ἐφαρμόζεται τόσον ἐπὶ μικροοικονομικῶν ὅσον καὶ ἐπὶ μακροοικονομικῶν προβλημάτων, εἰς τὴν τελευταίαν δὲ περίπτωσιν κυρίως ὑπὸ τὴν εἰδικὴν μορφὴν αὐτῆς, ἥτις εἶναι γνωστὴ ὡς μέθοδος «εἰσροῶν—ἐκροῶν» (²).

Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ γ ρ α μ μ ι κ ὴ μορφὴ τῶν χρησιμοποιουμένων παραγωγικῶν ἢ ἄλλων οἰκονομικῶν συναρτήσεων, ἡ ὁποία ἐπιβάλλει εἰδικὴν μαθηματικὴν μεταχείρισιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης ἐπιχειρεῖται ἡ παρουσίασις βασικῶν τινων μαθηματικῶν ἐννοιῶν ἡ γνῶσις τῶν ὁποίων τυγχάνει ἀπαραίτητος διὰ μίαν σοβαρὰν μελέτην τῆς νέας τεχνικῆς. Εἰδικώτερον, καταβάλλεται προσπάθεια νὰ δειχθῇ ὅσον τὸ δυνατὸν σαφέστερον ἡ οἰκονομικὴ χρησιμότης τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν «διάνυσμα» καὶ «μήτρα», διὰ συσχετίσεως αὐτῶν μὲ τὴν θεμελιώδη ἔννοιαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ «παραγωγικὴ διαδικασία» καὶ τὰς συναφεῖς πρὸς αὐτὴν οἰκονομικὰς ὑποθέσεις περὶ «σταθερῶν ἀναλογιῶν», «προσθετικότητος», «διαιρετότητος» κ.λ.π. (³)

---

(¹) Εἰς τὴν σύνταξιν τῆς παρούσης ἐργασίας ἐβοήθησαν πολλαπλῶς οἱ κ.κ. Δ. Π. Καράγιωργας καὶ Κ. Η. Κεβόρκ τῆς Διευθύνσεως Οἰκονομικῶν Μελετῶν τῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος.

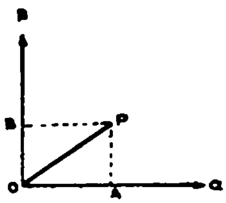
(²) Βλ. Α. Α. Λάζαρη, «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» εἰς Ἐπιθ. Πολ. καὶ Οἰκ. Ἐπιστημῶν Ἰαν.–Ἰουν. 1956 καὶ «Τὸ σύστημα Λεόντιεφ» εἰς Ἐπιθ. Πολ. καὶ Οἰκ. Ἐπιστημῶν, Ἰαν.–Ἰουν. 1957.

(³) Ἐνταῦθα δὲν ἀποσκοπεῖται πλήρης μαθηματικὴ ἀνάλυσις τῆς θεωρίας τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Διὰ μίαν τοιαύτην ἀνάλυσιν βλ. Charnes, Cooper and Henderson: An introduction to Linear Programming (Μέρος Β') N. Y. 1953, F. S. Vajda: The theory of games and Linear Programming, London 1955 καὶ R.G.D. Allen: Mathematical Economics, London 1956.

Ἐθεωρήθη σκόπιμον ὅπως ἀποφευχθῇ ἡ ἀποδεικτικὴ ἐπεξεργασία μαθηματικῶν τινων πράξεων, ἡ ὁποία θὰ ἐπεβάρυνεν ὑπερμέτρως τὸν ἀναγνώστην ἐνῷ δὲν θὰ ηὔξανε ἐνδεχομένως τὴν ἱκανότητα αὐτοῦ ὅπως ἀντιληφθῇ σαφέστερον τὰς περιγραφομένας σχέσεις.

## II. Παραγωγικαὶ διαδικασίαι καὶ διανύσματα

1. Ὡς «παραγωγικὴ διαδικασία» (productive process, activity) νοεῖται εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου. Οὕτω π.χ. ὁ συνδυασμὸς 3 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ α μὲ 2 μονάδας τοῦ συντελεστοῦ β πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω συνιστᾷ μίαν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς τὸ καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων ὡς ἀκολούθως :




Διάγραμμα 1.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ α καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ β. Τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (3,2) παριστᾷ τὴν ὡς ἄνω παραγωγικὴν διαδικασίαν (π.δ.). Ἡ αὐτὴ π.δ. δύναται ἐπίσης νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, πέρας τὸ σημεῖον P καὶ διεύθυνσιν τὴν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τῶν σημείων O καὶ P. Τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται γεωμετρικῶς διάνυσμα (vector).

Γενικῶς διάνυσμα καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ὡρισμένην κατεύθυνσιν, ἤτοι ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Διὰ τὸν συμβολισμὸν ἑνὸς διανύσματος χρησιμοποιοῦνται τὰ γράμματα τῶν ἄκρων αὐτοῦ μὲ μίαν ἐπιγραμμήν, π.χ., διὰ τὸ διάνυσμα τοῦ διαγράμματος 1 γράφομεν : $\overline{OP}$. [1].

[1] Διὰ συντομίαν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἓν μόνον γράμμα μετὰ ἢ ἄνευ ἐπιγραμμῆς.

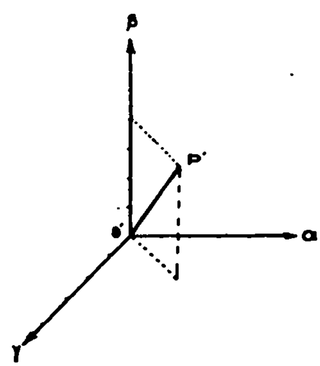
2. Τὰ διανύσματα διακρίνονται γενικῶς εἰς ἐλεύθερα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ χώρου καὶ εἰς ἐντετοπισμένα, τὰ ὁποῖα διακρίνονται περαιτέρω εἰς ὀλισθαίνοντα, δυνάμενα νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον μιᾶς εὐθείας διεύθυνσιν δὲ τὴν τῆς εὐθείας καὶ εἰς ἐφαρμοστά, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς (σταθερὰν ἀρχήν). Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ διανύσματα τῆς τελευταίας κατηγορίας, εἰδικώτερον δὲ μὲ διανύσματα ἔχοντα ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ([1]).

Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας προκύπτει εὐκόλως ὅτι τὰ ὡς ἄνω διανύσματα ἔχουν ὡς συντεταγμένας τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος αὐτῶν. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα $\overline{\mathrm{OP}}$ (διαγρ. 1) ἔχει συντεταγμένας ΟΑ (=3 μονάδες ἐκ τοῦ α) καὶ ΟΒ (=2 μονάδες ἐκ τοῦ β), αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡς εἴδομεν καὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Ρ.

3. Ἀναλυτικῶς (ἀλγεβρικῶς) τὸ διάνυσμα δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς μία στήλη (ἢ σειρὰ) ἀριθμῶν διατεταγμένων καθ' ὡρισμένην τάξιν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀνομάζονται στοιχεῖα τοῦ διανύσματος καὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς γεωμετρικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα ΟΡ ἀναλυτικῶς θὰ εἶναι :

$$\overline{\mathrm{OP}} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Ἂν πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος ἑνὸς ἀγαθοῦ ἀπαιτοῦνται 3,6 καὶ 4 μονάδες ἐκ τῶν τριῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἢ π.δ. διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἀγαθὸν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα $\overline{\mathrm{O'P'}}$ ἐντὸς τοῦ τριδιαστάτου χώρου :




Διάγραμμα 2.

([1]) Τὰ διανύσματα ταῦτα ὀνομάζονται συνήθως διανυσματικαὶ ἀκτῖνες. Βλ. Φ. Βασιλείου, «Μαθήματα Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν», Ἀθῆναι 1950 σ. 86.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κατηγμένων τοῦ ἀνωτέρω τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ γ.

Ἀναλυτικῶς τὸ διάνυσμα $\overline{O'P'}$ θὰ εἶναι :

$$\overline{O'P'} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς δοθεῖσαν π.δ. καθορίζει προφανῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ συνεπῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ χώρου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐν λόγῳ π.δ. διάνυσμα.

Ἂν εἰς μίαν π.δ. ὑπεισέρχωνται περισσότεροι τῶν τριῶν παραγωγικοὶ συντελεσταί, τὸ ἀντιστοιχοῦν διάνυσμα ἀνήκει εἰς τὸν καλούμενον ὑπερχῶρον (hyper-space) δηλ. εἰς τὸν νοητὸν χῶρον ὁ ὁποῖος ἔχει περισσοτέρας τῶν τριῶν διαστάσεις [1]. Γραφικὴ παράστασις τοιούτου διανύσματος δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀναλυτικὴ ὅμως παράστασις αὐτοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἁπλῆ. Οὕτω, ἂν π.χ. εἰς μίαν π.δ. λαμβάνουν μέρος οἱ παραγωγικοὶ συντελεσταὶ α, β, γ καὶ δ εἰς ποσότητας 1, 2, 4 καὶ 3 μονάδας ἀντιστοίχως, τὸ σχετικὸν διάνυσμα θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, ἡ δοθεῖσα π.δ. ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τοὺς συντελεστὰς α, β, γ, ...ν κατὰ ποσότητας $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ...$\alpha_\nu$ μονάδας θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

6. Ἑκάστη π.δ. δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον—ἐὰν βεβαίως τὸ ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς π.δ. ὀνομάζεται ἐπίπεδον δράσεως καὶ μετρεῖται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῶν παραγομένων οἰκονομικῶν ἀγαθῶν. Εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν ὑποτίθεται ὅτι αἱ ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς διαδικασίας χρησιμοποιούμεναι ποσότητες παραγωγικῶν

[1] Οἱ ὑπερχῶροι λαμβάνονται ἐνταῦθα ὡς εὐκλείδειοι, δηλ. ὑποτίθεται ὅτι ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς χώρους αὐτοὺς αἱ ἀρχαὶ τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας.

συντελεστῶν εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τῶν παραγομένων ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῆς π.δ. (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν) ([1]).

Οὕτω π.χ., ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (παράγρ. 1) εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος χρησιμοποιεῖ 3 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ 2 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β καὶ συνεπῶς αἱ σχέσεις τῆς ποσότητος τοῦ παραγομένου προϊόντος πρὸς τὰς χρησιμοποιουμένας ποσότητας συντελεστῶν α καὶ β εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἀντιστοίχως· ἡ αὐτὴ π.δ. εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῶν 2 μονάδων θὰ ἀπαιτήσῃ 6 (=2×3) μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ 4 (=2×2) μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β, οὕτως ὥστε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰς ἀρχικὰς σχέσεις ποσότητος παραγομένου προϊόντος καὶ ποσοτήτων χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν α καὶ β :

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ καὶ } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως 2 δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος διανύσματος $\overline{\text{OP}}$ (διάγρ. 1) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

$$2 \times \overline{\text{OP}} = 2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ σχηματίζομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα 6 (=2×3) καὶ 4 (=2×2) κατὰ σειράν :

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

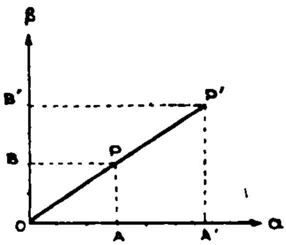
Γενικῶς, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ ἀριθμὸν σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τοῦ δοθέντος διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, π.χ. :

$$\text{x}. \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{x}\alpha_1 \\ \text{x}\alpha_2 \\ \text{x}\alpha_3 \\ . \\ . \\ . \\ \text{x}\alpha_\nu \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικῶς τὸ γινόμενον δοθέντος δανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν ρ δύναται

([1]) Βλ. Α. Λάζαρη, «Γραμμικὸς Προγραμματισμός», σ.σ. 19–22.

νά παρασταθῇ δι' ἑνὸς νέου διανύσματος μὲ συντεταγμένας ρ φορὰς μεγαλυτέρας τῶν συντεταγμένων τοῦ δοθέντος διανύσματος. Οὕτω π.χ. τὸ γινόμενον $2 \times \overline{OP}$ (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως 2) δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ διανύσματος $\overline{OP}'$ (διάγρ. 3) τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας OA′ (=2×OA) καὶ OB′ (=2×OB):




Διάγραμμα 3.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ τὴν μονάδα λαμβάνομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα ἀνὰ ἓν ἴσα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ δοθέντος. Τὰ δύο διανύσματα καλοῦμεν τότε ἴσα. Γενικῶς ἴσα εἶναι δύο ἢ περισσότερα διανύσματα ἂν ἔχουν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα.

7. Καθ' ὑπόθεσιν, ἑκάστη π.δ. δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε (1) ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε κλασματικὸν ἐπίπεδον δράσεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (ὑπόθεσις διαιρετότητος) (2). Οὕτω, ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον $\frac{1}{10}$ τῆς μονάδος θὰ ἀπαιτήσῃ $\frac{3}{10}$ μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ $\frac{2}{10}$ μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β. Διανυσματικῶς:

$$\frac{1}{10} \times \overline{OP} = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{bmatrix}.$$

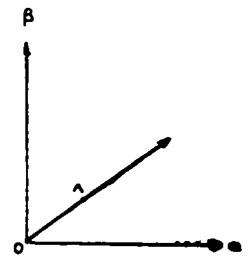
8. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος ὁδηγοῦν εἰς γραμμικὰς συνεχεῖς συναρτήσεις παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται γεωμετρικῶς ὡς εὐθεῖαι γραμμαί (3) ἐντὸς τοῦ θετικοῦ

(1) Θετικόν.

(2) Βλ. σχετικῶς Α. Λάζαρη, ἔνθ. ἀνωτ. σ. 21–23.

(3) Αἱ γραμμαὶ αὗται καλοῦνται ἀκριβέστερον ἡμιευθεῖαι ἢ ἀκτῖνες καθ' ὅσον δὲν ἐπεκτείνονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

χώρου τοῦ συστήματος συντεταγμένων μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τούτου :




Διάγραμμα 4.

Ἐκ τοῦ διαγρ. 4 καταφαίνεται ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις παραγωγῆς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐκ δοθείσης π.δ. (ἤτοι ἐξ ἑνὸς διανύσματος) [1], ἂν τὰ ἐπίπεδα δράσεως αὐτῆς λαμβάνουν συνεχεῖς θετικὰς τιμάς.

9. Ἂν τὸ ἐπίπεδον δράσεως μιᾶς π.δ., π.χ. τῆς π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (παράγρ. 1), εἶναι μηδὲν θὰ ἔχωμεν :

$$0\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Τὸ διάνυσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος καλεῖται **μηδενικὸν** [2] καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου $\bar{0}$. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον θὰ εἶναι :

$$\bar{0} \equiv \begin{bmatrix}0_1\\0_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0_\nu\end{bmatrix}$$

10. Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ μετροῦνται ἐπὶ ἑνὸς συγκεκριμένου ἄξονος τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα μὲ συντεταγμένην ἐπὶ τοῦ οἰκείου ἄξονος τὴν μονάδα καὶ μηδενικὰς τὰς λοιπὰς συντεταγμένας. Οὕτω εἰς τὸ διάγρ. 1 θὰ ἔχωμεν διανύσματα :

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

(1) Τοῦ διανύσματος $\overline{OA}$ ἐν προκειμένῳ.

(2) Γεωμετρικῶς τὸ διάνυσμα τοῦτο ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων καὶ τυχοῦσαν κατεύθυνσιν.

ἀντιπροσωπεύοντα τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν συντελεστῶν α καὶ β ἀντιστοίχως. Ταῦτα καλοῦμεν μοναδιαῖα διανύσματα.

Γενικῶς εἰς ἕνα ν-διάστατον χῶρον θὰ ἔχωμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα :

$$\begin{bmatrix} 1_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0_1 \\ 1_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 1_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \quad \cdots\cdot \quad \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1_\nu \end{bmatrix}$$

τὰ ὁποῖα οἰκονομικῶς παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τῶν ν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Πᾶσα συντεταγμένη διανύσματος δύναται τώρα νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοίχου μοναδιαίου διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὴν συντεταγμένην, π.χ. ἡ πρώτη συντεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overline{OP}$ (διάγραμμα 1) θὰ εἶναι :

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

11. Μέχρι τοῦδε ἠσχολήθημεν μὲ μαθηματικὰς ἐννοίας καὶ παραστάσεις ἀναφερομένας εἰς μεμονωμένας π.δ. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ τὸν μαθηματικὸν χειρισμὸν περισσοτέρων τῆς μιᾶς π.δ.

Εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν θεωρεῖται ὅτι δύο ἢ περισσότεραι π.δ., χρησιμοποιούμεναι ταυτοχρόνως εἰς δεδομένα ἐπίπεδα δράσεως, ἀπορροφοῦν ποσότητας συντελεστῶν ἴσας πρὸς τὰς ὑπ' αὐτῶν ἀπορροφωμένας ποσότητας συντελεστῶν ἂν ἑκάστη π.δ. ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου· τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν (ὑπόθεσις προσθετικότητος). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων π.δ. θεωρεῖται ὡς μὴ ἐπηρεάζουσα εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὴν συνολικὴν οἰκονομικὴν θυσίαν (1).

Μαθηματικῶς τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς προσθέσεως διανυσμάτων. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὰ διανύσματα

$$\overline{OK} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \overline{O\Lambda} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 5 \end{bmatrix}$$

παριστοῦν δύο π.δ. ταυτοχρόνως χρησιμοποιουμένας εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως

(1) Βλ. σχετικὰς παρατηρήσεις εἰς Α. Λάζαρη ἔνθ. ἀνωτ. σ. 60.

τῆς μονάδος. Αἱ ἀναλισκόμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν, ἔστω α καὶ β, θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα 5 καὶ 7 μονάδες ἀντιστοίχως. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδεται καὶ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο διανυσμάτων :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ὑπελογίσθησαν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων.

Γενικῶς, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα διανύσματα σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀντιστοίχων (¹) στοιχείων τῶν προσθετέων διανυσμάτων (²), π.χ. :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \dots + \rho_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \dots + \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu + \beta_\nu + \dots + \rho_\nu \end{bmatrix}$$

Ἂν αἱ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $\overline{OK}$ καὶ $\overline{O\Lambda}$ παριστώμεναι π.δ. χρησιμοποιῶνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα δράσεως 3 καὶ 2 μονάδων ἀντιστοίχως, πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν θὰ πρέπῃ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν.

$$3 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τοὺς σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα νέα διανύσματα.

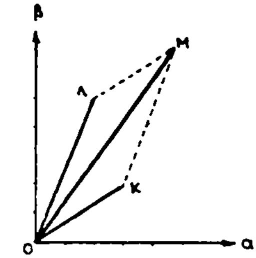
$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων διανυ-

(¹) Συνεπῶς πρόσθεσις διανυσμάτων μὴ ἐχόντων ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλ. μὴ ἀνηκόντων εἰς τὸν ἴδιον γεωμετρικὸν χῶρον, ἀποκλείεται.

(²) Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει (ὑπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν) καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν διανυσμάτων.

σμάτων, π.χ. τῶν διανυσμάτων $\overline{OK}$ καὶ $\overline{O\Lambda}$ ἀνωτέρω, δεικνύεται εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα :




Διάγραμμα 5.

Τὸ διάνυσμα $\overline{OM}$, μὲ συντεταγμένας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\overline{OK}$ καὶ $\overline{O\Lambda}$, ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων. Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὸ $\overline{OM}$ εἶναι τὸ διαγώνιον διάνυσμα τοῦ παραλληλογράμμου ΟΛΜΚ τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μηκῶν (1) ΟΚ καὶ ΟΛ τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων (2).

## III. Παραγωγικαὶ διαδικασίαι καὶ μῆτραι

1. **Αἱ π.δ.** τὰς ὁποίας διαθέτει μία οἰκονομικὴ μονὰς πρὸς ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων οἰκονομικῶν ἔργων εἶναι συνήθως περιωρισμένου ἀριθμοῦ (ὑπόθεσις πεπερασμένου ἀριθμοῦ π.δ.). Τὸ σύνολον τῶν ἐν λόγῳ π.δ. καθορίζει τὴν παραγωγικὴν διάρθρωσιν καὶ τὰς τεχνολογικὰς δυνατότητας (3) ἢ ἁπλῶς τὴν τεχνολογίαν (technology) τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Τὰ κατωτέρω συμπαρατιθέμενα διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς π.δ. δοθείσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἀποτελοῦν παράδειγμα τοιαύτης τεχνολογίας :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπαλείφοντες τὰς ἐσωτερικὰς ἀγκύλας τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν τοιαύτην

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Τὸ μῆκος διανύσματος μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, εἶναι (συμφώνως πρὸς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα) $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots}$, ὅπου $\alpha_1\ \alpha_2 \dots$ ἀποτελοῦν τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος.

(2) Ἂν τὰ προστιθέμενα διανύσματα παριστάνουν δυνάμεις, ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τὴν Μηχανικήν, τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται «παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων».

(3) Αἱ τεχνολογικαὶ δυνατότητες ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς διαθεσίμους ποσότητας

Ἡ παράστασις αὕτη καλεῖται μαθηματικῶς «μήτρα» (matrix).

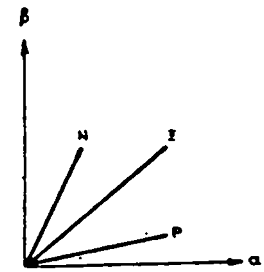
Γενικῶς, ἡ μήτρα εἶναι σύστημα διανυσμάτων εὑρισκομένων ἐν τῷ αὐτῷ χώρῳ ἢ ἁπλῶς πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν. Ἡ διάταξις τῶν ἀριθμῶν (στοιχείων) ὁρίζεται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν εἰς τὰς σειρὰς καὶ τὰς στήλας τῆς μήτρας. Ἂν $\iota = (1,2.\ldots\mu)$ συμβολίζῃ τυχοῦσαν σειρὰν τῆς μήτρας καὶ $\varkappa$ $(=1,2\ldots\nu)$ τυχοῦσαν στήλην αὐτῆς, $\alpha_{\iota\varkappa}$ εἶναι γενικῶς τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς σειρᾶς $\iota$ καὶ τῆς στήλης $\varkappa$.

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμόν, ἡ γενικὴ μορφὴ μήτρας $\mu$ σειρῶν καὶ $\nu$ στηλῶν—$\mu X \nu$ τάξεως—δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

$$\text{ἢ συντόμως : } \begin{bmatrix} \alpha_{\iota\varkappa} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \iota = 1,\ 2..\nu \\ \varkappa = 1,\ 2..\mu \end{matrix}$$

2. Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς μήτρας εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν διανυσμάτων. Οὕτω ἡ μήτρα τοῦ προηγουμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος θὰ εἶναι :




Διάγραμμα 6

Τὰ διανύσματα $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ ἔχουν συντεταγμένας (2,4), (5,4) καὶ (5,1) ἀντιστοίχως. Προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν τῆς μήτρας, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ διανύσματα εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς μήτρας.

---

παραγωγικῶν συντελεστῶν καθορίζουν τὰς παραγωγικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομικῆς μονάδος.

Ἂν αἱ εἰς τὰ διανύσματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι π.δ. διέπωνται ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῆς διαιρετότητος), αἱ ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐκκινοῦσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς κατευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ προσδιορίζουν ἀντιστοίχους γραμμικὰς (καὶ συνεχεῖς) συναρτήσεις παραγωγῆς διὰ τὴν δοθεῖσαν οἰκονομικὴν μονάδα.

3. Ἂν μία μήτρα $\mu X \nu$ [1] τάξεως ἔχῃ ἀριθμὸν σειρῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ($\mu=\nu$) αὕτη καλεῖται «τετραγωνικὴ μήτρα» π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἂν αἱ σειραὶ μήτρας εἶναι περισσότεραι τῶν στηλῶν αὐτῆς ἢ ἀντιθέτως ($\mu \neq \nu$) αὕτη καλεῖται «ὀρθογώνιος μήτρα». Ὀρθογώνιος εἶναι ἡ πρώτη μήτρα τῆς παραγρ. 1, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ κάτωθι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα περισσοτέρας τῆς μιᾶς σειρᾶς καὶ μίαν μόνον στήλην ($\nu=1$ καὶ $\mu \neq \nu$) ἀποτελεῖ ἁπλοῦν διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα μίαν μόνον σειρὰν καὶ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας ($\mu=1$ καὶ $\nu \neq \mu$) ἀποτελεῖ ἐπίσης διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Τὰ διανύσματα τῆς μορφῆς ταύτης (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ σειραὶ μιᾶς μήτρας) καλοῦνται σειραὶ–διανύσματα (row-vectors). Πρὸς διάκρισιν, τὰ διανύσματα τῆς προηγουμένης μορφῆς (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ στῆλαι μιᾶς μήτρας) καλοῦνται στῆλαι–διανύσματα (column-vectors).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ μητρῶν καὶ διανυσμάτων εἶναι διπλῆ· μία μήτρα σύγκειται ἐκ διανυσμάτων ἀλλὰ καὶ ἓν διάνυσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις μήτρας.

---

[1] Τὰ μ καὶ ν θεωροῦνται βεβαίως ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἂν $\mu=\nu=1$ τότε ἔχομεν ἁπλῶς ἕνα ἀριθμόν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μήτρα $1 \times 1$ τάξεως.

4. Ἡ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα καλεῖται «μηδενικὴ μήτρα» (null matrix), π.χ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ μηδενικὴ μήτρα ἀποτελεῖ σύστημα μηδενικῶν διανυσμάτων. Ἡ τετραγωνικὴ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον (1) αὐτῆς μονάδας καὶ μηδενικὰ πάντα τὰ λοιπὰ στοιχεῖα καλεῖται «μοναδιαία μήτρα» (unit matrix) καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου I, π.χ.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μοναδιαία μήτρα ἀποτελεῖ σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐντὸς τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων.

## IV. Πράξεις ἐπὶ μητρῶν

Εἰς τὸ παρὸν τμῆμα δίδονται οἱ κυριώτεροι κανόνες χειρισμοῦ τῶν μητρῶν. (2). Ἡ ἐκμάθησις τῶν κανόνων αὐτῶν εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν διατύπωσιν καὶ λύσιν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

*1. Πρόσθεσις μητρῶν.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας μήτρας $\mu\chi\nu$ τάξεως, σχηματίζομεν νέαν μήτραν τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προστιθεμένων μητρῶν, π.χ. :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+3 \\ 3+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ὁμοίως :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) Κυρία διαγώνιος τετραγώνου μήτρας καλεῖται ἡ ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω ἀρχομένη διαγώνιος.

(2) Ὁ ἀναγνώστης ὁ ἐνδιαφερόμενος διὰ λεπτομερῆ ἀνάλυσιν πρέπει νὰ ἀνατρέξῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν τεχνικῶν βιβλίων τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἀφαίρεσις ἐξομοιοῦται ἀλγεβρικῶς μὲ πρόσθεσιν, ἡ διαφορά :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ διαφορὰ Α—Α, ὅπου Α ἔστω $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ μηδενικὴ μήτρα (Τμῆμα III παρ. 4) δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ διαφορὰ δύο ἴσων μητρῶν (1).

2. *Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ ἀριθμόν :* Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μήτραν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς μήτρας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰ οὕτω λαμβανόμενα γινόμενα θέτομεν ἀντιστοίχως ὡς στοιχεῖα μιᾶς νέας μήτρας. Οὕτω :

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. *Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ μήτραν.* Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς πράξεως ταύτης ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχή. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μήτραν Α, τάξεως μχν, ἐπὶ τὴν μήτραν Β, τάξεως πχρ. Ἐν πρώτοις διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις τοῦ ὡς ἄνω πολλαπλασιασμοῦ ἀπαιτεῖται ὅπως αἱ δύο μῆτραι εἶναι συμβιβασταὶ (conformable), δηλ. αἱ στῆλαι ν τῆς πρώτης μήτρας νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς σειρὰς π τῆς δευτέρας μήτρας. Ἂν πληροῦται ἡ προϋπόθεσις αὕτη, πρὸς καθορισμὸν τοῦ γινομένου τῶν δύο μητρῶν, σχηματίζομεν νέαν μήτραν Γ ἔχουσαν σειρὰς ὅσας καὶ ἡ Α καὶ στήλας ὅσας καὶ ἡ Β, δηλ. μχρ τάξεως καὶ μὲ στοιχεῖα προσδιοριζόμενα ὡς ἀκολούθως : Ἔστω γενικῶς ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον γ τῆς Γ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ι σειρᾶς καὶ τῆς κ στήλης τῆς Γ. Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ι τῆς μήτρας Α ἐπὶ ἓν ἕκαστον τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς στήλης κ τῆς μή-

(1) Ἴσαι ὀνομάζονται δύο μῆτραι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἔχουσαι τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα.

τρας B καὶ προσθέτομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ οὕτω προκύπτοντα γινόμενα. Τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\gamma_{ik}$. Ἔστω π. χ. ὅτι :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ } B \equiv \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Αἱ A καὶ B εἶναι συμβιβασταὶ μῆτραι συνεπῶς τὸ γινόμενον AB δύναται νὰ ὑπολογισθῇ. Ἡ νέα μήτρα Γ (=AB) θὰ ἔχῃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα 2 σειρὰς καὶ 3 στήλας. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον $\gamma_{11}$ τῆς Γ, λαμβάνομεν τὴν σειρὰν 1 τῆς μήτρας A καὶ τὴν στήλην 1 τῆς μήτρας B, πολλαπλασιάζομεν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν (πρῶτον μὲ πρῶτον, δεύτερον μὲ δεύτερον κ.ο.κ.) καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα :

$$3 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 2 = 9$$

Τὸ ἄθροισμα 9 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\gamma_{11}$.

Ἀναλόγως τὸ στοιχεῖον $\gamma_{12}$ θὰ εἶναι :

$$3 \times 4 + 2 \times 6 + 0 \times 2 = 24,$$

Τὸ στοιχεῖον $\gamma_{23}$ :

$$1 \times 5 + 4 \times 3 + 3 \times 0 = 17$$

κ.ο.κ.

Συνεπῶς :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 21 \\ 19 & 34 & 17 \end{bmatrix} \quad \ldots\text{παραδ. } 1$$

Ὁμοίως :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} \quad \ldots\text{παραδ. } 2$$

Ἂν ἔχωμεν δύο μήτρας ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι μοναδιαία, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἄλλην μήτραν, π. χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots\text{παραδ. } 3$$

Γενικῶς AI = A.

Ἐπειδή, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως, τὰ διανύσματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις μητρῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ διάνυσμα καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ διάνυσμα ἀκολουθοῦν τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Οὕτω :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. } 4$$

Ὁμοίως :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 46 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. } 5$$

Ἐπίσης :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 + 8 + 15 + 30 = 54 \quad \text{παράδ. } 6$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad \text{παράδ. } 7$$

Ὁ ἀναγνώστης δύναται εὐκόλως νὰ διαπιστώσῃ ὅτι πολλαπλασιασμὸς δύο σειρῶν—διανυσμάτων ἢ δύο στηλῶν—διανυσμάτων εἶναι ἀδύνατος, καθ' ὅσον δὲν πληροῦται εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ ἀρχικὴ προϋπόθεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περὶ συμβιβαστῶν μητρῶν.

Ἂν εἰς τὸ παράδ. 1 ἀνωτέρω ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν, λαμβάνομεν :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Οὕτω διατασσόμεναι αἱ ὡς ἄνω μῆτραι δὲν εἶναι συμβιβασταὶ καὶ συνεπῶς ὁ σημειούμενος πολλαπλασιασμὸς δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ. Τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς παρατηροῦμεν ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὰ παραδ. 4, 5 καὶ 7. Ἀντιθέτως εἰς τὸ παράδ. 2 ἀλλαγὴ τῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν δίδει γινόμενον

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

δυνάμενον νὰ ὑπολογισθῇ, καθ' ὅσον αἱ μῆτραι ἐξακολουθοῦν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν σειρᾶς νὰ εἶναι συμβιβασταί. Ὁμοίως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀλλαγῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὸ παράδ. 6 ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ἂν ἐν τούτοις ἐκτελέσωμεν τοὺς ἀνωτέρω σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \text{ διὰ τὸ πρῶτον γινόμενον}$$

$$\text{καὶ } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 12 & 15 & 18 \\ 5 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix} \text{ διὰ τὸ δεύτερον γινόμενον.}$$

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα εἶναι, ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης, ἐντελῶς διάφορα τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων τῶν παραδ. 2 καὶ 6.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ γνωστὸς ἀλγεβρικὸς νόμος περὶ ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον $\alpha\beta = \beta\alpha$, δὲν ἰσχύει προκειμένου περὶ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἔχομεν γενικῶς $AB \neq BA$. Καθίσταται συνεπῶς ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν π.χ. τῆς μήτρας B μὲ τὴν μήτραν A εἰς προπολλαπλασιασμὸν (pre-multiplication) τῆς B μὲ τὴν A, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον AB, καὶ εἰς μετὰ-πολλαπλασιασμὸν (post-multiplication) τῆς B μὲ τὴν A, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον BA.

Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων ἰσχύει κατ' ἐξαίρεσιν εἰς δύο περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Ἡ πρώτη εἶναι ἡ περίπτωσις πολλαπλασιασμοῦ μήτρας μὲ ἄλλην μοναδιαίαν τοιαύτην : Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ παραδ. 3 δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι $AI = IA$. Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἀναφέρεται εἰς 5Γ κατωτέρω.

Ἐν συνόψει, διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν ὁ ἀναγνώστης πρέπει νὰ ἐνθυμῆται ὅτι : α) ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως καθίσταται δυνατὴ μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς πρώτης μήτρας ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς δευτέρας μήτρας, β) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως συσχετίζομεν—συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα κανόνα—σειρὰς τῆς πρώτης μήτρας μὲ στήλας τῆς δευτέρας μήτρας καὶ γ) γενικῶς $AB \neq BA$. (Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσοτέρας τῶν δύο μητρῶν, τότε πολλαπλασιάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς δύο πρώτας μήτρας, ἐν συνεχείᾳ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μὲ τὴν τρίτην μήτραν, κ.ο.κ.).

4. *Ἀναστροφὴ μήτρας*. Ἀπὸ μίαν μήτραν Α δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν νέαν μήτραν, τῆς ὁποίας αἱ σειραὶ εἶναι στῆλαι τῆς Α καὶ (συνεπῶς) αἱ στῆλαι αὐτῆς σειραὶ τῆς Α. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται ἀναστροφὴ (transposition) ἡ δὲ προκύπτουσα μήτρα, ἀνάστροφος τῆς Α καὶ συμβολίζεται μὲ Α'. Οὕτω ἂν

$$A \equiv \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{τότε } A' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Προφανῶς : $A'' = A$.

5. *Ἀντιστροφὴ μήτρας*.

Α. Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστρόφου μήτρας. Εἰς τὴν στοιχειώδη ἄλγεβραν ἀριθμός τις καλεῖται ἀντίστροφος δοθέντος ἄλλου, ὅταν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. Οὕτω π.χ. ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ β ἂν

$$\alpha\beta = 1$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔχομεν $\alpha = \frac{1}{\beta}$, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀντίστροφος δοθέντος ἄλλου δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸν δοθέντα ἀριθμόν [1].

Ἐπειδὴ $\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$, ἡ ἀρχικὴ σχέσις γίνεται :

$$\beta^{-1}\beta = 1$$

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω π. χ. ἀντὶ $30 : 6$ ἢ $\frac{30}{6}$ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{6} \times 30$ ἢ $6^{-1} \times 30$.

Γενικῶς $\frac{\chi}{\psi} = \psi^{-1}\chi$.

Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω θὰ ὀνομάσωμεν μήτραν τινά, ἔστω Ε, ἀντίστροφον δοθείσης τετραγωνικῆς [2] μήτρας Α, ἂν τὸ γινόμενον

---

(1) Ὁ ἀριθμὸς β εἶναι ἐπίσης ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ α, δυνάμει τῆς σχέσεως $\alpha\beta = 1$ ἐξ ἧς $\beta = \frac{1}{\alpha}$

(2) Μόνον αἱ τετραγωνικαὶ μήτραι δύνανται κατ' ἀρχὴν νὰ ἀντιστραφοῦν.

ΕΑ ἰσοῦται πρὸς τὴν μοναδιαίαν μήτραν I ([1]). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ γράψωμεν ἀναλόγως $E = A^{-1}$.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἀντιστρόφου μήτρας, ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως δύο μητρῶν, ἔστω B : A, μετατρέπεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν $A^{-1}B$.

Εἶναι ἀνάγκη βεβαίως νὰ γνωρίζωμεν πῶς ἀντιστρέφεται δοθεῖσα τετραγωνικὴ μήτρα. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται προηγουμένως γνῶσις στοιχείων τινῶν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁριζουσῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα παραθέτομεν συνοπτικῶς εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον.

B. Ὁρίζουσαι. Μία μήτρα εἶναι, ὡς ἐλέχθη, πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν καὶ ὄχι εἷς συγκεκριμένος ἀριθμός ([2]). Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα μιᾶς μήτρας εἶναι ἐν τούτοις δυνατὸν νὰ ληφθοῦν, διὰ καταλλήλων πράξεων καὶ συνδυασμῶν, διάφοροι ἀριθμητικαὶ τιμαί. Μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι καὶ ἡ ὁρίζουσα (determinant). Ἔστω π. χ. ἡ τετραγωνικὴ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας λαμβάνομεν τὰ γινόμενα $3 \times 4$ καὶ $1 \times 5$. Ἀφαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸ δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον θὰ ἔχωμεν : $3 \times 4 - 1 \times 5 = 7$. Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι ἡ ὁρίζουσα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὡς ἄνω μήτραν.

Ἡ ὁρίζουσα παριστᾶται διὰ τοῦ πίνακος ἀριθμῶν τῆς ἀντιστοίχου μήτρας, πλαισιουμένου ὅμως—πρὸς διάκρισιν—μὲ δύο καθέτους γραμμὰς ἀντὶ τῶν γνωστῶν ἀγκυλῶν. Οὕτω π. χ. ἡ προηγουμένη ὁρίζουσα θὰ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ὁμιλοῦμεν περὶ στοιχείων, σειρῶν, στηλῶν καὶ κυρίας διαγωνίου τῆς ὁριζούσης, ὡς ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μήτρας. Αἱ ὁρίζουσαι ὅμως ἔχουν πάντοτε ἀριθμὸν σειρῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ὡς ἀναφερόμεναι μόνον εἰς τετραγωνικὰς μήτρας.

(1) Ἡ I εἶναι τάξεως οἵας καὶ ἡ A.
(2) Βλ. καὶ R. G. D. Allen : Mathematical Economics, London 1956 σ. 399.

Ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἡ ὁρίζουσα νιοστῆς τάξεως ($\nu \times \nu$) θὰ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ἂν ἡ ὁρίζουσα ἀναφέρεται εἰς μήτραν Α γράφεται συμβολικῶς $|A|$.

Μετὰ τὰς ἀνωτέρω γενικότητας θὰ ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸν **ὑπολογισμὸν** τῆς ὁριζούσης, δηλ. μὲ τὴν εὕρεσιν συγκεκριμένης ἀριθμητικῆς τιμῆς εἰς τὴν ὑπὸ μορφὴν πίνακος παριστωμένην ὁρίζουσαν.

Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος εἶναι ἁπλοῦς προκειμένου περὶ ὁριζούσης δευτέρας τάξεως ($2 \times 2$), ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὸ προηγουμένως ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τῆς κυρίας διαγωνίου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἕτερον γινόμενον. Ἡ προκύπτουσα διαφορὰ θὰ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζούσης. Ἂν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι νιοστῆς τάξεως ($\nu \times \nu$) τότε ἐφαρμόζεται ὡρισμένη διαδικασία πρὸς ἀναγωγὴν τῆς ὁριζούσης εἰς συνδυασμόν τινα ὁριζουσῶν δευτέρας τάξεως εὐχερῶς ὑπολογιζομένων. Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς διαδικασίας ταύτης εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐννοίας τῆς **ἐλάσσονος** καὶ τοῦ **ἀλγεβρικοῦ συμπληρώματος**.

**Ἐλάσσων** (minor) ἑνὸς στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης, καλεῖται ἡ ὁρίζουσα ἡ ὁποία σχηματίζεται ἂν ἀφαιρεθοῦν ἐκ τῆς δοθείσης ἡ στήλη καὶ ἡ σειρὰ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖται τὸ στοιχεῖον. Ἔστω π. χ. ἡ ἀκόλουθος ὁρίζουσα τρίτης τάξεως :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου 1 θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ τοῦ στοιχείου 4,

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ τοῦ στοιχείου 0, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ τοῦ στοιχείου 7, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ κ.ο.κ.

Προφανῶς τὰ στοιχεῖα ὁριζούσης νιοστῆς τάξεως ἔχουν ἐλάσσονας $\nu$-1 τάξεως.

Ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα (co-factor) στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης καλεῖται ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου προσημασμένη μὲ θετικὸν μὲν σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, μὲ ἀρνητικὸν δὲ σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι περιττὸς ἀριθμός ([1]). Οὕτω, τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων 1, 4, 0 καὶ 7 εἰς τὴν ἀνωτέρω ὁρίζουσαν, θὰ εἶναι κατὰ σειράν :

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \text{ καὶ } -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν δοθείσης ὁριζούσης τρίτης τάξεως προχωροῦμεν τώρα ὡς ἀκολούθως :

α) Προσδιορίζομεν τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τυχούσης σειρᾶς (ἢ στήλης) τῆς ὁριζούσης.

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν ἀλγεβρικῶν συμπληρωμάτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς ληφθείσης σειρᾶς (ἢ στήλης).

γ) Εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω γινομένων (ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὰς εἰς αὐτὰ περιεχομένας ὁριζούσας δευτέρας τάξεως).

Παράδειγμα 1ον : Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν προηγουμένως σημειωθεῖσαν ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως. Πρὸς τοῦτο :

α) Προσδιορίζομεν τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς πρώτης, ἔστω, στήλης κατὰ σειρὰν (ἐκ τῶν ἄνω) :

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν ἀλγεβρικῶν συμπληρωμάτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα :

$$+1\times\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -4\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, +6\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

γ) Ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν :

$$1\times\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} -4\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} +6\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= 1\times(-35) - 4\times(-5) + 6\times 15 = 75$$

([1]) Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν μορφὴν τῶν ὁριζουσῶν οἱ δεῖκται τῶν στοιχείων δὲν γράφονται μὲν ἀλλὰ νοοῦνται.

([2]) Τὸ ἄθροισμα τοῦτο καλεῖται ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης.

Ὁ ἀριθμὸς 75 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὡς ἄνω ὁριζούσης τρίτης τάξεως.

Παράδειγμα 2ον : Ἔστω πρὸς ὑπολογισμὸν ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι :

$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀλγεβρικῶν συμπληρωμάτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης, εἶναι :

$$1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 24 + 30 = 7$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν πᾶσαν ὁρίζουσαν νιοστῆς τάξεως ($\nu > 3$). Ὅταν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι τάξεως ἀνωτέρας τῆς τρίτης τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων αὐτῆς εἶναι τάξεως τρίτης ἢ ἀνωτέρας καὶ πρὸς ὑπολογισμὸν αὐτῶν ἀπαιτεῖται δι' ἓν ἕκαστον ἡ ἐφαρμογὴ τῆς αὐτῆς διαδικασίας πρὸς ἀναγωγήν του εἰς ὁριζούσας δευτέρας τάξεως. Συνεπείᾳ τούτου, ἡ ὡς ἄνω μέθοδος ὑπολογισμοῦ καθίσταται ἐπίπονος καὶ δυσεφάρμοστος εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἀντ' αὐτῆς χρησιμοποιοῦνται τότε ἄλλαι ἁπλούστεραι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ([1]). Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς ἐν λόγῳ μεθόδους διότι δὲν ἐνδιαφερόμεθα ἀμέσως διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων περὶ ὁριζουσῶν, δυνάμεθα τώρα νὰ ἐκθέσωμεν τὴν διαδικασίαν τῆς ἀντιστροφῆς μήτρας.

Γ. Ἡ διαδικασία τῆς ἀντιστροφῆς μήτρας. Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀντιστροφῆς δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως :

α) Ὑπολογίζομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μήτραν ὁρίζουσαν. Ἂν αὕτη εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς ([2])

β) σχηματίζομεν μήτραν μὲ στοιχεῖα τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς ὑπὸ ἀντιστροφὴν μήτρας.

---

([1]) Βλ. A. C. Aitken : Determinants and matrices, London 1954 σελ. 45 κ.ἑ.

([2]) Ἂν ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἡ ἀντιστροφὴ δὲν εἶναι δυνατὴ καθ' ὅσον ἀποκλείεται τότε ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπὸ στοιχεῖον (δ) ἀναφερομένων διαιρέσεων.

γ) Ἀναστρέφομεν τὴν νέαν μήτραν.

δ) Διαιροῦμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἀναστρόφου μήτρας διὰ τῆς ὑπολογισθείσης ὁριζούσης.

Ἡ οὕτω προκύπτουσα μήτρα εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς.

Ἔστω γενικῶς ἡ μήτρα A

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ἂν $|A| \neq 0$, τότε σχηματίζομεν μήτραν μὲ στοιχεῖα τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς A:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω μήτραν $A_{ik}$ εἶναι γενικῶς τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου $\alpha_{ik}$ τῆς A.

Ἂν ἀναστρέψωμεν τὴν προηγουμένην μήτραν καὶ διαιρέσωμεν ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἀναστρόφου μήτρας διὰ $|A|$, λαμβάνομεν τὴν ἀντίστροφον τῆς A:

$$A^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἀντιστροφῆς μήτρας: Ἂς λάβωμεν τὴν μήτραν

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία ἔχει ὁρίζουσαν 18. Ἡ μήτρα ἡ ἔχουσα στοιχεῖα τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς προηγουμένης εἶναι :

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἀναστρέφοντες τὴν τελευταίαν μήτραν καὶ διαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἀναστρόφου μήτρας διὰ 18, λαμβάνομεν τὴν μήτραν :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης.

Ἂν προ-πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἀντίστροφον μήτραν ἐπὶ τὴν ἀρχικήν, θὰ λάβωμεν τὴν μοναδιαίαν μήτραν I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως (5A) ὁρισθέντα διὰ τὴν ἀντιστροφήν. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδει ἐπίσης καὶ ὁ μετα-πολλαπλασιασμὸς τῆς ὡς ἄνω ἀντιστρόφου μήτρας ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν μήτραν, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ ἀναγνώστης ἐκτελῶν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον. Γενικῶς (καὶ κατ' ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος περὶ μὴ ἰσχύος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν) :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

## V. Μία ἐφαρμογή

1. Ἔστω δοθεῖσα οἰκονομία, ἀπαρτιζομένη ἀπὸ τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους α, β, καὶ γ καὶ τοὺς τομεῖς «ἐργασία» καὶ «τελικὴ κατανάλωσις».

Ὁ τομεὺς «ἐργασία» παρέχει ἐργατικὰς ὑπηρεσίας εἰς τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους, ὁ δὲ τομεὺς «τελικὴ κατανάλωσις» ἀπορροφᾷ ἓν μέρος ἐκ τοῦ κατ' ἔτος παραγομένου συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου. Τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ προϊόντος τούτου διατίθεται εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος ὡς πρώτη ἢ βοηθητικὴ ὕλη διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος τῶν ἐν λόγῳ κλάδων.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὸ ἔτος $\tau_1$ αἱ διακλαδικαὶ καὶ λοιπαὶ συναλλαγαὶ ἐντὸς τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας διεμορφώθησαν ὡς κάτωθι :

ΠΙΝΑΞ 1

| | α | β | γ | κ |
|---|---|---|---|---|
| α | 100 | — 15 | — 56 | = 29 |
| β | — 20 | + 150 | — 56 | = 74 |
| γ | — 30 | — 60 | + 140 | = 50 |
| | | | | 153 |
| ε | — 50 | — 75 | — 28 | |
| | ἀξία ε = 153 | | | |

Ἡ πρώτη ἰσότης τοῦ πίνακος 1 σημαίνει ὅτι ἐκ τοῦ συνολικῶς παραχθέντος κατὰ τὸ ἔτος $\tau_1$ προϊόντος τοῦ κλάδου α, ἀξίας 100 χρηματικῶν μονάδων (χ.μ.), διετέθη προϊὸν ἀξίας 15 χ.μ. εἰς τὸν κλάδον β, προϊὸν ἀξίας 56 χ.μ. εἰς τὸν κλάδον γ καὶ προϊὸν ἀξίας 29 χ.μ. εἰς τὴν τελικὴν κατανάλωσιν (κ). Κατ' ἀναλογίαν, αἱ ἑπόμεναι δύο ἰσότητες δεικνύουν τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων β καὶ γ ἀντιστοίχως. Τέλος ἡ ἔναντι τοῦ ε σειρὰ ἀριθμῶν δεικνύει τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἐργατικῶν ὑπηρεσιῶν συνολικῆς ἀξίας 153 χ.μ. (¹) μεταξὺ τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων.

2. Ὁ πίναξ 1 ἀποτελεῖ ἁπλῆν στατιστικολογιστικὴν κατάστασιν τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας διὰ τὸ ἔτος $\tau_1$. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι αἱ παραγωγικαὶ συναρτήσεις τῶν κλάδων α, β καὶ γ εἶναι γραμμικῆς μορφῆς (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν). Δυνάμεθα τότε νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἕκαστον κλάδον, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος 1, σταθεροὺς τεχνολογικοὺς συντελεστὰς δεικνύοντας τὴν διάρθρωσιν τοῦ κόστους παραγωγῆς τοῦ οἰκείου κλάδου. Σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Ἐφ' ὅσον ἡ παραγωγὴ προϊόντος ἀξίας 100 χ.μ. ὑπὸ τοῦ κλάδου α ἀπαι-

(¹) Εἰς τὴν ἀξίαν ταύτην περιλαμβάνονται δι' ἁπλούστευσιν αἱ ἀμοιβαὶ πάσης μορφῆς προσωπικοῦ ὑπηρεσιῶν παραγωγικῆς καταναλώσεως, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ἐπιχειρηματικὸν κέρδος.

τεῖ συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα 1 ἀνάλωσιν προϊόντος τοῦ κλάδου β ἀξίας 20 χ.μ., ἡ παραγωγὴ προϊόντος 1 χμ. ὑπὸ τοῦ κλάδου α ἀπαιτεῖ προϊὸν τοῦ κλάδου β ἀξίας $\frac{20}{100} = 0.2$ χ.μ. Ὁμοίως, ἡ ἀξία τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου γ καὶ τῶν ἐργατικῶν ὑπηρεσιῶν αἱ ὁποῖαι ἀναλίσκονται ὑπὸ τοῦ κλάδου α πρὸς παραγωγὴν ὑπ' αὐτοῦ προϊόντος 1 χ.μ. θὰ εἶναι 0.3 χ.μ. καὶ 0.5 χ.μ. ἀντιστοίχως. Οἱ οὕτω ὑπολογισθέντες ἀριθμοὶ 0.2, 0.3 καὶ 0.5 ἀποτελοῦν τεχνολογικοὺς συντελεστὰς κόστους διὰ τὸν κλάδον α. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν συντελεστῶν αὐτῶν ἡ παραγωγικὴ διαδικασία διὰ τὸν κλάδον α δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μορφὴν διανύσματος ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀνωτέρω διανύσματος ἀναφέρονται εἰς ἀξίας (χ.μ.) τῶν ἐργατικῶν ὑπηρεσιῶν, καὶ τῶν ποσοτήτων τῶν προϊόντων τῶν κλάδων α, β καὶ γ τὰ ὁποῖα ἀναλίσκονται ὑπὸ τοῦ κλάδου α πρὸς παραγωγὴν ὑπ' αὐτοῦ προϊόντος ἀξίας 1 χ.μ. Τὸ στοιχεῖον μηδὲν εἰς τὸ διάνυσμα σημαίνει ὅτι ὁ κλάδος α δὲν χρησιμοποιεῖ ὡς πρώτην ἢ βοηθητικὴν ὕλην ἴδιον προϊόν [1].

Σκεπτόμενοι ἀναλόγως, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστὰς κόστους καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς παραγωγικὰς διαδικασίας τῶν κλάδων β καὶ γ. Τὰς παραγωγικὰς ταύτας διαδικασίας παριστοῦν τὰ διανύσματα :

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

[1] Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν ἀρχικῶς λεχθέντων περὶ τοῦ τρόπου διαθέσεως τοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου.

Κατὰ συνέπειαν ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς οἰκονομίας θὰ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \end{vmatrix}$$

3. Ὁ προσδιορισμὸς τεχνολογικῶν συντελεστῶν κόστους ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος 1 (καὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν) παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἀναλυτικὸν ἐνδιαφέρον, ὡς θέλει δειχθῆ ἀμέσως κατωτέρω.

Ἔστω π. χ. ὅτι ἡ τελικὴ κατάλωσις ἀπορροφᾷ (ἢ προβλέπεται ὅτι θὰ ἀπορροφήσῃ) κατὰ τὸ ἔτος $\tau_2$ προϊόντα τῶν κλάδων α, β καὶ γ ἀξίας 80, 100 καὶ 40 χρηματικῶν μονάδων ἀντιστοίχως. Τὸ ἐκ τῆς μεταβολῆς ταύτης προκῦπτον πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου, αἱ διακλαδικαὶ συναλλαγαὶ καὶ ἡ ἀξία τῶν ἐργατικῶν ὑπηρεσιῶν αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς νέας ζητήσεως τῶν τελικῶν καταναλωτῶν.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ θέτοντες $X_1$, $X_2$ καὶ $X_3$, διὰ τὰς ζητουμένας ἀξίας τῶν προϊόντων τῶν κλάδων α, β καὶ γ, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὡς ἀκολούθως :

ΠΙΝΑΞ 2

| | α | β | γ | κ |
|---|---|---|---|---|
| α | $X_1$ | $-\ 0.1X_2$ | $-\ 0.4X_3 =$ | 80 |
| β | $-0.2X_1$ | $+\ X_2$ | $-\ 0.4X_3 =$ | 100 |
| γ | $-0.3X_1$ | $-\ 0.4X_2$ | $+\ X_3 =$ | 40 |
| ε | $-0.5X_1$ | $-\ 0.5X_2$ | $-\ 0.2X_3$ | 220 |

Ἐκ τοῦ πίνακος 2 λαμβάνομεν τὸ σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} X_1 - 0.1X_2 - 0.4X_3 &= 80 \\ -0.2X_1 + X_2 - 0.4X_3 &= 100 \\ -0.3X_1 - 0.4X_2 + X_3 &= 40 \end{aligned} \qquad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν περὶ ἴσων διανυσμάτων (¹) τὸ σύστημα (1) δύναται νὰ γραφῇ οὕτω :

$$\begin{bmatrix} X_1 - 0.1X_2 - 0.4X_3 \\ -0.2X_1 + X_2 - 0.4X_3 \\ -0.3X_1 - 0.4X_2 + X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐν συνεχείᾳ γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ὡς δύναται νὰ βεβαιωθῇ ὁ ἀναγνώστης, ἐκτελῶν τὸν εἰς τὸν ἀριστερὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) σημειούμενον πολλαπλασιασμόν.

Θέτοντες Α,Χ,Π, διὰ τὰς μήτρας τῆς ἐξισώσεως (3), κατὰ τὴν διδομένην σειράν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$A.X. = \Pi \qquad (3')$$

ἡ ὁποία συμβολίζει τὴν ἐξίσωσιν (3).

Ἂν τώρα προ-πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3′) μὲ τὴν ἀντίστροφον μήτραν $A^{-1}$ θὰ λάβωμεν :

$$A^{-1}\, A.X = A^{-1}\, \Pi \qquad (3'')$$

Ἐπειδὴ $A^{-1}\, A = I$ καὶ $IX = X$, ἡ (3″) γίνεται :

$$X = A^{-1}\, \Pi \qquad (3''')$$

Ἡ (3‴) δίδει τὴν λύσιν τῆς (3′).

Κατὰ ταῦτα, ἡ λύσις τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα περὶ ἀντιστροφῆς

(¹) Βλ. Τμ. 2 παρ. 6.

$$A^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1.28048 & 0.39634 & 0.67073 \\ 0.4878 & 1.34146 & 0.7317 \\ 0.57926 & 0.655487 & 1.4939 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) καὶ ἐκτελοῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸν πολλαπλασιασμὸν λαμβάνομεν

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168{,}9 \\ 202{,}4 \\ 171{,}6 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ἐξ ἧς (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων διανυσμάτων) ἔχομεν τὰς λύσεις :

$$X_1 = 168.9$$

$$X_2 = 202.4$$

$$\text{καὶ } X_3 = 171.6$$

Αἱ λύσεις αὗται ἐκφράζουν ἀξίας συνολικῆς παραγωγῆς διὰ τοὺς κλάδους α, β καὶ γ.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $X_1$, $X_2$ καὶ $X_3$ διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὸν πίνακα 2, σχηματίζομεν τὸν πίνακα 3, κατωτέρω, ἐκ τῶν ἐγγραφῶν τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλήρης ἀπάντησις εἰς τὸ τεθὲν πρόβλημα [1]

ΠΙΝΑΞ 3

| | α | β | γ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α | 168.9 | − 20.2 | − 68.7 | = | 80 |
| β | − 33.7 | + 202.4 | − 68.7 | = | 100 |
| γ | − 50.7 | − 80.9 | + 171.6 | = | 40 |
| ε | − 84.5 | − 101.3 | − 34.2 | | 220 |
| | ἀξία ε = 220 | | | | |

(1) Τοιαύτη ἀπάντησις ἦτο ἐπίσης δυνατὸν νὰ δοθῇ καὶ δι' ἁπλουστέρων μαθηματικῶν μεθόδων. Ἡ δι' ἀντιστροφῆς μέθοδος λύσεως ἐχρησιμοποιήθη ἐνταῦθα παραδει-

᾿Εκ τῆς συγκρίσεως τῶν πινάκων 2 καὶ 3 καθίσταται δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεταβολῶν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν αἱ ὁποῖαι ἔλαβον χώραν μεταξὺ τῶν ἐτῶν $\tau_1$ καὶ $\tau_2$, συνεπείᾳ τῶν μεταβολῶν τῶν κονδυλίων τῆς τελικῆς καταναλώσεως. Προφανῶς αἱ ὡς ἄνω πληροφορίαι παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον διὰ μίαν προγραμματίζουσαν ᾿Αρχήν, ἡ ὁποία θὰ ἔθετεν ὡς σκοπὸν τοῦ προγράμματός της τὰς σημειωθείσας μεταβολὰς εἰς τὴν τελικὴν κατανάλωσιν.

Τὸ ἐξετασθὲν πρόβλημα ἀνήκει εἰς εἰδικὴν κατηγορίαν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, τὰ καλούμενα προβλήματα «εἰσροῶν-ἐκροῶν», ἅτινα ἠρεύνησε τὸ πρῶτον ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard Β. Λεόντιεφ [1].

γματικῶς, καθ' ὅσον αὕτη λόγῳ τῆς γενικότητός της εἶναι κατάλληλος διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων, ὡς εἶναι συνήθως τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἀναλύσεις. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς πάντως ἡ ἀντιστροφὴ τῆς μήτρας γίνεται δι' εἰδικῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος.

(1) B. Leontieff: The Structure of American Economy 1919-1939, N.Y. 1941.